Apellidos y nombre

Tema 6, 7 y 8: Números complejos, vectores, geometría analítica. MAT I 1 C

1. a) Hacer la división $\frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$ expresando el resultado en forma polar.

b) Calcular y dibujar: $\sqrt{\frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}}$

a)

$$\frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}-i)}{(-\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}-i)} = \frac{3-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i+1}{(-\sqrt{3})^2-i^2} =$$

$$= \frac{-2-2\sqrt{3}i}{3+1} = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i =$$

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\alpha = tg^{-1}\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = tg^{-1}\sqrt{3} = \begin{cases} 60^\circ \ \times \\ 240^\circ \ \checkmark \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i} = 1_{240^\circ}}$$

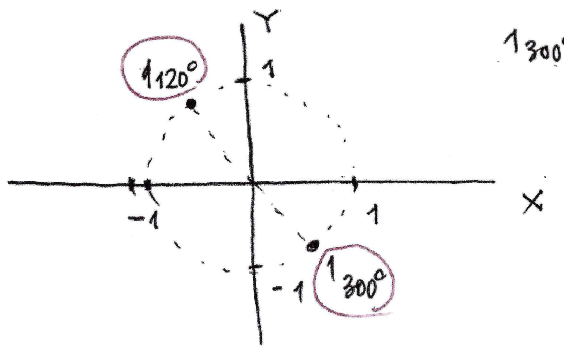
b)

$$\sqrt{1_{240^\circ}} = \begin{cases} R = \sqrt{1} = 1 \\ \beta = \frac{240^\circ}{2} + k\cdot\frac{360^\circ}{2} = 120^\circ + k\cdot 180^\circ \\ \qquad k = 0;1 \end{cases}$$

Luego; $\boxed{1_{120^\circ}}$ y $\boxed{1_{300^\circ}}$

$$1_{120^\circ} = \cos 120^\circ + \text{sen}\,120^\circ\cdot i = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$1_{300^\circ} = \cos 300^\circ + \text{sen}\,300^\circ i = +\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$



Apellidos y nombre

2. Dados los vectores: $\vec{a}(5,-2)\ y\ \vec{b}(1,3)$.

a. Dibuja los vectores en un sistema de referencia ortonormal.

b. Halla el ángulo que forman los vectores: $\vec{a}\ y\ \vec{b}$

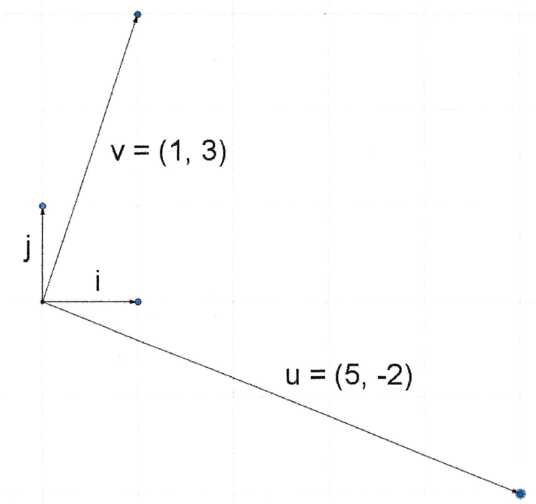
c. Hallar la proyección de $\vec{a}\ sobre\ \vec{b}$

d. Calcula el área del triángulo que determinan.

e. Hallar un vector perpendicular a $\vec{a}$ que sea unitario.

Solución:

a)



b) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{(5,-2)\cdot(1,3)}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{10}}=\frac{5-6}{\sqrt{290}}=\frac{-1}{\sqrt{290}}\rightarrow\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{290}}\right)=\boxed{93'37^{\circ}}$

d) $A=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{10}\sqrt{29}\sin\alpha=\boxed{8'5}$

c) $pr\ \vec{a}|_{\vec{b}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{-1}{\sqrt{10}}=\boxed{\frac{-\sqrt{10}}{10}}$

e) $\vec{n}=(2;5)\ ;\ |\vec{n}|=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$

$\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{29}}(2;5)=\left(\frac{2}{\sqrt{29}};\frac{5}{\sqrt{29}}\right)=\boxed{\left(\frac{2\sqrt{29}}{29};\frac{5\sqrt{29}}{29}\right)}$

Apellidos y nombre

4. Dados los puntos A(3, 1), B(1, −3) y C(5, k).
   a. Determinar el valor de k para que estén alineados.
   b. Dar otros dos puntos más de la recta que los contiene a parte de A, B y C.
   c. ¿Qué ángulo forma esta recta al cortar al eje X?
   d. Hallar el área del triángulo que forma dicha recta al cortar a los ejes de coordenadas.

a) $\vec{AB}$ l.d. con $\vec{AC}$

$\vec{AB} = (1,-3)-(3,1) = (-2,-4)$

$\vec{AC} = (5,k)-(3,1) = (2,k-1)$

$\frac{-2}{2} = \frac{-4}{k-1}$; $-2k+2=-8$; $-2k=-10$; $\boxed{k=5}$

b) r: $A(3,1)$, $B(1,-3)$

$\vec{v} = \vec{AB} = (1,-3)-(3,1) = (-2,-4)$

$-4x+2y+C=0$; $-4\cdot 3+2\cdot 1+C=0$; $C=+10$

$-4x+2y+10=0$; $-2x+y+5=0$; $\boxed{-2x+y+5=0}$

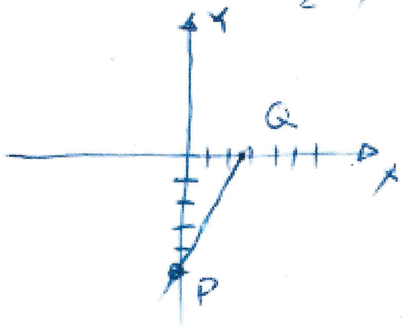
$x=2$; $y=-1$, $\boxed{P(2,-1)}$;

c) $\vec{v}=(-2,-4)$ $m=\frac{-4}{-2}=2$; $tg\,\alpha=2$; $\alpha=tg^{-1}2=$

$=\boxed{63'43^\circ}$

d) $x=0$; $y=-5$; $P(0,-5)$

$y=0$; $x=\frac{5}{2}$; $Q(\frac{5}{2},0)$



$A=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{\frac{5}{2}\cdot 5}{2}=\boxed{\frac{25}{4}}$

Apellidos y nombre

3. Responder a los siguientes apartados:

a. Hallar la distancia entre los puntos A(3, 1) y B(7, −5)

b. Hallar la ecuación general de la recta que pasa por los puntos anteriores.

c. Hallar la mediatriz del segmento AB

d. Determinar el ángulo que forma la recta que pasa por AB con 3x + 4y - 12 = 0.

Solución:

a. $d(A,B)=\sqrt{(7-3)^2+(-5-1)^2}=\sqrt{4^2+(-6)^2}=\sqrt{16+36}=\boxed{\sqrt{52}}$

b. r: A(3, 1); $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(7,-5)-(3,1)=(4,-6)$

r: $v_2x-v_1y+C=0;\ -6\cdot 3-4\cdot 1+C=0; C=22$

Luego, r: -6x - 4y + 22 = 0; simplificando: $\boxed{3x+2y-11=0}$

c. Para calcular la mediatriz, calculamos primero el punto medio:

$$M=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right)=\left(\frac{3+7}{2},\frac{1-5}{2}\right)=(5,-2)$$

Luego, la perpendicular por dicho punto:

$\vec{n}=\vec{v}(4,-6);\ n_1x+n_2y+C=0;\ 4x-6y+C=0$

$4\cdot 5-6\cdot(-2)+C=0;\ C=-32;\ 4x-6y-32=0;$ simplificando: $\boxed{2x-3y-16=0}$

d. $$\begin{cases} 3x+2y-11=0;\ y=\dfrac{-3x+11}{2};\ m=\dfrac{-3}{2} \\ 3x+4y-12=0;\ y=\dfrac{-3x+12}{4};\ m'=\dfrac{-3}{4} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\gamma=|\operatorname{tg}(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\right|=\left|\frac{m-m'}{1+m\cdot m'}\right|=\left|\frac{\frac{-3}{2}-\left(\frac{-3}{4}\right)}{1+\frac{-3}{2}\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)}\right|=\frac{6}{17}$$

$$\gamma=tg^{-1}\left(\frac{6}{17}\right)=\boxed{19'44^{\circ}}$$